UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES
«SCIENCES ET TECHNIQUES ET SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراه « العلوم والتقنيات والعلوم الطبية»

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mme **BOULAGOUAZ Khadija**
Soutiendra : **le Samedi 19/07/2025** à **10H00**
Lieu : **FSDM – *Centre Visioconférence***

Une thèse intitulée :

« The geometry of tangent bundles of pseudo-Riemannian manifolds »

En vue d'obtenir le ***Doctorat***

FD : ***Mathématiques et Applications***
Spécialité : ***Géométrie***

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
ECH-CHERIF EL KETTANI Mustapha	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Président
BOUCETTA Mohamed	Faculté des Sciences et Techniques, Marrakech	PES	Rapporteur
MANSOURI Mohammed Wadia	Faculté des Sciences, Kénitra	MCH	Rapporteur
CHOULLI Hanan	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	MCH	Rapporteur
MOUANIS Hakima	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Examinateur
EL AMRANI Abdelkhalek	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	MCH	Examinateur
KADAOUI ABBASSI Mohamed Tahar	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse

Résumé :

En géométrie, quoique les variétés pseudo-Riemanniennes constituent une généralisation naturelle des variétés Riemanniennes, elles présentent un comportement différent et plus complexe, notamment en termes de complétude, d'holonomie et de décomposabilité, et offrent le cadre mathématique le plus approprié à plusieurs théories de la physique moderne. Les deux différences majeures entre la géométrie Riemannienne et la géométrie pseudo-Riemannienne résident dans l'existence des vecteurs de genre lumière, ayant une norme nulle, et le fait que la métrique induite par le tiré en arrière par une immersion d'une métrique pseudo-Riemannienne n'est pas nécessairement une métrique pseudo-Riemannienne. En particulier, il se peut que la métrique tirée en arrière par l'inclusion canonique soit dégénérée donnant naissance à la notion de sous-variétés de genre lumière.

L'existence de trois types de vecteurs tangents à une variété pseudo-Riemannienne rend la géométrie du fibré tangent à une variété pseudo-Riemannienne plus riche que celle du fibré tangent à une variété Riemannienne, en offrant la possibilité de considérer de nouveaux objets et notions géométriques, tels que les sous-variétés de genre lumière du fibré tangent avec toute la géométrie qui en découle.

Bien que les fibrés tangent aux variétés Riemanniennes aient été largement étudiées dans la littérature, peu d'attention a été apporté aux fibrés tangents aux variétés pseudo-Riemanniennes. Ainsi ce travail est dévoué à l'étude de la géométrie du fibré tangent à une variété pseudo-Riemannienne muni d'une métrique g-naturelle. Une grande partie est consacrée à l'étude des objets qui sont propres à la géométrie pseudo-Riemannienne, par exemple la géométrie du fibré nul, les hélices de genre lumière et les surfaces hélicoïdales de genre lumière.

On commence par une étude approfondie des métriques g-naturelles pseudo-Riemanniennes sur le fibré tangent à une variété pseudo-Riemannienne M, comme généralisation de la même notion sur le fibré tangent à une variété Riemannienne, et on fournit une caractérisation de celles qui sont pseudo-Riemanniennes sur le fibré tangent TM.

Puis, on considère le sous-ensemble du fibré tangent constitué des vecteurs de genre lumière, qu'on appelle le fibré nul au-dessus de M et qu'on note T_0M. On montre que le fibré nul muni de la restriction d'une métrique g-naturelle pseudo-Riemannienne G est une sous variété de genre lumière de TM.

On prouve également qu'une condition nécessaire et suffisante pour que T_0M soit totalement géodésique est que (M,g) soit une surface Lorentzienne à courbure sectionnelle constante qu'on déterminera. Par conséquence, si la dimension de M est supérieure ou égale à 3, les objets géométriques induits T_0M sur dépendent de la distribution écran choisie. Ce qui nous amène à construire une distribution écran de T_0M dont le champ de vecteurs transversal est vertical. Il s'ensuit que, relativement à cette distribution, T_0M n'est jamais plat en tant que sous-variété de genre lumière de TM.

Après avoir explicité les expressions du tenseur de type Ricci et de la courbure scalaire extrinsèque de T_0M muni de cette distribution écran, on donne des conditions suffisantes pour que certaines métriques g-naturelles induisent des métriques avec un tenseur de type Ricci symétrique sur T_0M. Il en découle également que si M est à courbure sectionnelle constante et si G est de type Kaluza-Klein, alors la courbure scalaire extrinsèque de T_0M est constante.

Par la suite, on étudie la structure de Cauchy-Riemann sur T_0M induite par une structure presque complexe J introduite par V. Oproiu sur TM. On montre que T_0M muni de cette structure est D-géodésique, i.e. sa seconde forme fondamentale est nulle sur la distribution presque complexe D, si et seulement si, la variété de base est une surface Lorentzienne. On

traite également les questions de parallélisme et d'intégrabilité de la distribution de Cauchy-Riemann, et on trouve que T_0M présente une certaine rigidité dans le sens où D n'est jamais parallèle et elle est intégrable, si et seulement si, la variété de base est une surface Lorentzienne.

Après cela, on considère les métriques induites par les métriques g-naturelles sur le fibré unitaire, et on caractérise celles qui sont pseudo-Riemanniennes. On construit également une famille de structures de contact (resp. (ε)-para-contact) sur le fibré unitaire, et on montre qu'elles gardent les mêmes propriétés en comparaison avec le cas Riemannien dans le sens où, une telle structure est de K-contact (resp. K-para-contact), si et seulement si, la variété de base est à courbure sectionnelle constante positive (resp. négative).

Puis, on munit le fibré unitaire à une surface pseudo-Riemannienne d'une métrique g-naturelle pseudo-Riemannienne de type Kaluza-Klein et on caractérise les hélices ayant comme direction le champ de vecteurs géodésique, i.e. celles qui gardent un angle constant avec le champ de vecteurs géodésique. On commence par une classification des courbes géodésiques hélicoïdales. Après, on donne une caractérisation des courbes de Frenet hélicoïdales qui sont de genre temps ou de genre espace. On montre en particulier, qu'une condition nécessaire pour l'existence des hélices qui ne sont pas des géodésiques sur le fibré unitaire à une surface pseudo-Riemannienne à courbure sectionnelle constante est que G ne soit pas une métrique de Kaluza-Klein, et dans ce cas toute hélice est à courbure et torsion constantes. On étudie également les courbes hélicoïdales de genre lumière et on prouve, en particulier, que toute hélice de genre lumière est à courbure de Cartan constante.

On procède ensuite à une classification des surfaces hélicoïdales non-dégénérées, i.e. de genre temps ou de genre espace. On trouve qu'une telle surface est nécessairement à courbure sectionnelle constante. Puis, on introduit la notion des hypersurfaces de genre lumière hélicoïdales par rapport à une distribution écran et on établit également une condition nécessaire pour qu'une surface de genre lumière, du fibré unitaire, soit hélicoïdale par rapport à une distribution écran.

Dans le même contexte des fibrés tangents, on considère le sous-fibré des hyperplans, i.e. le fibré donné par le noyau d'une 1-forme différentielle qui ne s'annule pas. Ainsi, en munissant le fibré tangent d'une métrique g-naturelle Riemannienne de type Kaluza-Klein, et en se restreignant au cas où la variété de base admet une 1-forme parallèle et le cas où elle est un produit tordu avec la droite réelle comme facteur, on caractérise le fibré des hyperplans qui est un soliton par rapport au flot de la courbure moyenne au moyen des équations différentielles, et on fournit des nouveaux exemples.

Mots clés : Fibré tangent, variété pseudo-Riemannienne, métrique g-naturelle, fibré tangent nul, sous-variété de genre lumière, structure de Cauchy-Riemann, courbe hélicoïdale, surface hélicoïdale, soliton du flot de la courbure moyenne.

THE GEOMETRY OF TANGENT BUNDLES OF PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

Abstract:

Compared to Riemannian manifolds, pseudo-Riemannian manifolds present different behavior in many geometrical aspects such as completeness, holonomy group and decomposability, and also for being the appropriate framework of many interesting theories in physics. The main reason for this difference on behavior is the existence, for indefinite pseudo-Riemannian manifolds, of lightlike vectors. In particular a submanifold of an indefinite pseudo-Riemannian manifold is not necessarily a pseudo-Riemannian manifold, that brings to existence lightlike submanifolds.

In the context of the geometry of tangent bundles, tangent bundles of indefinite pseudo-Riemannian manifolds have fairly different properties from tangent bundles of Riemannian manifolds. Notably, the set of lightlike vectors and the set of timelike vectors have no counterpart in Riemannian geometry. Despite the fact that the tangent bundles of Riemannian manifolds have been extensively studied in the literature, the tangent bundles of pseudo-Riemannian manifolds are still unexplored.

So, in this thesis, we aim to study the geometry of the tangent bundles of pseudo-Riemannian manifolds, find similarities and differences in relationship to the Riemannian case, and give a particular emphasis to some objects which are proper to indefinite pseudo-Riemannian manifolds: the null tangent bundle, null helix curves and null helix hypersurfaces.

In the beginning, we focus on the study of pseudo-Riemannian g-natural metrics on tangent bundles of pseudo-Riemannian manifolds, as generalization of g-natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds. We characterize pseudo-Riemannian g-natural metrics on the tangent bundle of a pseudo-Riemannian manifold.

Afterwards, we define the null tangent bundle T_0M of a pseudo-Riemannian manifold M as the subset of the tangent bundle TM constituted of lightlike vectors. We find that T_0M endowed with the restriction of a pseudo-Riemannian g-natural metric is a lightlike hypersurface of TM. Then we show that T_0M is never totally geodesic, unless the base manifold is a Lorentzian surface, consequently the induced geometric objects (curvature, Ricci type tensor, extrinsic scalar curvature, etc) do always depend on the chosen screen distribution. Hence, we construct a screen distribution of T_0M with vertical transversal vector field. It turns out that if $dim(M) \geq 3$, then T_0M is never flat with respect to this screen distribution.

We calculate the Ricci type tensor and the extrinsic scalar curvature with respect to this screen distribution, then we give sufficient conditions for the Ricci type tensor of T_0M to be symmetric, we also deduce that if M has a constant sectional curvature and TM is endowed with a metric of Kaluza-Klein type, then its extrinsic scalar curvature is constant.

Afterwards, we study the CR-lightlike distribution on T_0M induced from an almost complex structure defined by V. Oproiu on TM and we prove that T_0M endowed with such a distribution is a D-geodesic CR-lightlike hypersurface, if and only if, the base manifold is a Lorentzian surface. Then we study the parallelism and the integrability of the CR-distribution. We find that T_0M presents some kind of rigidity in the sense that the CR-distribution D of T_0M is never parallel and it is integrable, if and only if, the base manifold is a Lorentzian surface.

After that, we define the notion of *g*-natural metrics on the unit tangent bundle of a pseudo-Riemannian manifold and characterize those which are pseudo-Riemannian, that allows us to construct a family of contact pseudo-metric (resp. (ε)-paracontact metric) on the unit tangent bundles and investigate their geometrical properties. We show that such a structure behaves exactly like the Riemannian case, that is, it is *K*-contact (resp. *K*-paracontact), if and only if, the base manifold is a space of constant positive (resp. negative) sectional curvature.

Then, we endow the unit tangent bundle of a pseudo-Riemannian surface of constant Gaussian curvature with a *g*-natural metric of Kaluza-Klein type and classify helix curves with axis the geodesic vector field. We start by giving a characterization of geodesic helices, then we classify Frenet helix curves. In particular, we prove that a necessary condition for the existence of non-geodesic helix curves in that context is that the metric is not a Kaluza-Klein metric, and in this case any non-degenerate helix curve has constant curvature and torsion.

In the same context, we classify non-degenerate helix surfaces. We show, in particular, that they have constant sectional curvature. Then we define screen-helix submanifolds of a Lorentzian manifold, and give a necessary condition for a lightlike surface to be a screen-helix surface.

Finally, we characterize when the hyperplane tangent bundles, i.e. the kernel bundles determined by a non-vanishing differential one form, and the translated unit tangent bundles, are solitons, pseudo-solitons of the mean curvature flow with respect to the geodesic vector field and the Liouville vector field in *TM*. We give a particular emphasis to the case where the base manifold admits a parallel one form with respect to the Levi-Civita connection, that constitutes a general case of the product of manifolds with the real line as factor, cosymplectic manifolds and compact manifolds which are fiber bundles over a torus with finite structural group.

Key Words: Tangent bundle, pseudo-Riemannian manifold, g-natural metric, null tangent bundle, lightlike submanifold, CR-lightlike structure, helix curve, helix surface, mean curvature flow soliton.