

## CENTRE D'ETUDES DOCTORALES «SCIENCES ET TECHNIQUES ET SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراء « العابوء والتقنيات » عربية المدينة المدينة المدينة المدينة المدينة المدينة المدينة المدينة الم

## AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz -Fès - annonce que

# Mr DARDOUR Zakarya

Soutiendra : le Lundi 07/07/2025 à 10H00 Lieu : FSDM – Centre Visioconférence

## Une thèse intitulée :

# «Theoretical Advances in Bilevel Optimization: Reformulations, Stationarity, and Optimality Conditions »

En vue d'obtenir le **Doctorat** 

FD: Sciences et Techniques

Spécialité : Optimisation et recherche opérationnelle

### Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
AZROUL Elhoussine	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, USMBA, Fès	PES	Président
SERHANI Mustapha	Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales, UMI, Meknès	PES	Rapporteur
AIT MANSOUR Mohamed	Faculté polydisciplinaire, Safi, UCA	PES	Rapporteur
BARBARA Abdelkrim	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, USMBA, Fès	МСН	Rapporteur
RHOUDAF Mohamed	Faculté des Sciences, UMI, Meknès	PES	Examinateur
KHAZARI Adil	L'École Nationale de Commerce et de Gestion, USMBA, Fès	МСН	Examinateur
LAFHIM Lahoussine	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, USMBA, Fès	МСН	Directeur de thèse
KALMOUN El Mostafa	École des Sciences et de l'Ingénierie, Université Al Akhawayn, Ifrane	PES	Co-Directeur de thèse



## CENTRE D'ETUDES DOCTORALES «SCIENCES ET TECHNIQUES ET SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراة « الطبية» والتقنيات

#### Résumé:

Cette thèse est consacrée à l'étude des problèmes d'optimisation à deux niveaux, en se concentrant spécifiquement sur la dérivation de conditions d'optimalité dans divers contextes à l'aide de différentes approches et reformulations. Après avoir introduit le problème étudié et ses différentes formulations, nous commençons par établir des conditions nécessaires d'optimalité du second ordre, à la fois primales et duales, pour des données lisses et non lisses. Ceci est réalisé en utilisant deux reformulations distinctes du modèle hiérarchique afin de le transformer en un problème à un seul niveau: La reformulation par la fonction valeur du problème de niveau inférieur et la  $\Psi$ -reformulation.

Par la suite, nous explorons la reformulation KKT et établissons des conditions d'optimalité nécessaires du second ordre pour les solutions locales des programmes à deux niveaux. Dans un premier temps, nous traitons le problème reformulé comme un problème standard de programmation non linéaire (NLP) et établissons des conditions d'optimalité dans le cadre des qualifications de contraintes récemment développées pour les NLP. Ensuite, nous considérons la reformulation KKT du problème à deux niveaux initial comme un programme mathématique avec contraintes d'équilibre (MPEC). Plus précisément, nous présentons trois types de conditions d'optimalité nécessaires du second ordre associées à cette structure, basées sur les notions de stationnarité de Clarke, de Mordukhovich et de stationnarité forte.

Enfin, nous considérons un problème plus général appelé programme à deux niveaux avec inégalité variationnelle, pour lequel nous dérivons des conditions d'optimalité du premier et du second ordre sans supposer aucune hypothèse de régularité sur les données ni de qualifications de contraintes. Cette analyse est menée pour deux reformulations du problème bilevel: la reformulation KKT et la reformulation par la gap fonction, tout en mettant en évidence les avantages de chaque approche.

**Mots clés**: Optimisation à deux niveux; Fonction valeur; Fonctions multivoques; Reformulation KKT; Conditions d'optimalité; Structure MPEC; Structure NLP; Stationnarité; Inégalité variationnelle; Approximations; Sous-différentiels.



CENTRE D'ETUDES DOCTORALES «SCIENCES ET TECHNIQUES ET SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراة « الطبية» والتقنيات

## STHEORETICAL ADVANCES IN BILEVEL OPTIMIZATION: REFORMULATIONS, STATIONARITY, AND OPTIMALITY CONDITIONS

#### Abstract:

This thesis is devoted to the study of bilevel optimization problems, specifically focusing on the derivation of optimality conditions in various contexts using different approaches and reformulations. After introducing the problem under consideration and its different forms, we begin by deriving primal and dual second-order necessary optimality conditions for both smooth and non-smooth data. This is accomplished by using two different reformulations of the hierarchical model to transform it into a single-level problem: the lower-level value function reformulation and the  $\Psi$ -reformulation.

Subsequently, we explore the KKT reformulation and derive second-order necessary optimality conditions for local solutions to bilevel programs. First, we treat the reformulated problem as a standard nonlinear programming (NLP) problem and establish optimality conditions within the framework of recently developed constraint qualifications for NLPs. Next, we consider the KKT reformulation of the original bilevel problem as a mathematical program with equilibrium constraints (MPEC). Specifically, we present three types of second-order necessary optimality conditions of this structure, based on Clarke, Mordukhovich, and strong stationarity concepts.

Finally, we consider a more general problem called bilevel programs with variational inequality, for which we derive first- and second-order optimality conditions without assuming any smoothness regularity or constraint qualifications. This is done for two reformulations of our bilevel problem: the KKT reformulation and the gap function reformulation, while highlighting the advantages of each approach.

**Key Words:** Bilevel optimization; Value function; Set-valued mappings; KKT reformulation; Optimality conditions; MPEC structure; NLP structure; Stationarity; Variational inequality; Approximations; Subdifferentials