جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES
«SCIENCES ET TECHNIQUES ET
SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراه « العلوم والتقنيات
والعلوم الطبية»

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **Faris Mohamed**
Soutiendra : **le Samedi 18/01/2025** à **10H00**
*Lieu : **FSDM – Département de Géologie***

Une thèse intitulée :

« Newton Polygons and their application in Valuation Theory and Number Theory »

En vue d'obtenir le **Doctorat**

FD : ***Mathématiques et Applications***
Spécialité : **Algèbre et Théorie de nombres**

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
CHILLALI Abdelhakim	Faculté Poly-Disciplinaire, Taza	PES	Président
AYOUJIL Abdesslem	Ecole Supérieure de l'Education et de la Formation, UMP , Oujda	PES	Rapporteur
SAHMOUDI Mohammed	Faculté des sciences, UMI, Meknès	MCH	Rapporteur
EZ-ZOUAK Siham	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	MCH	Rapporteur
AQALMOUN Mohamed	Ecole Normale Supérieure, Fès	MCH	Examinateur
KHALID Abdelmoumen	Ecole Normale Supérieure, Fès	MCH	Examinateur
KCHIT Omar	Ecole Normale Supérieure, Fès	MC	Invité
EL FADIL Lhoussain	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse

Résumé :

Ce travail explore l'application des techniques du polygone de Newton pour aborder trois problèmes fondamentaux en théorie des valuations et en théorie des nombres : l'extension des valeurs absolues ultramétriques, la factorisation et l'irréductibilité des polynômes sur des corps valués, et la monogénéité des corps de nombres.

Nous commençons par examiner un corps valué (K, O), où O est un anneau de valuation discrète de rang 1, M est son idéal maximal, et Ƒ = O/M est le corps résiduel. Soit L une extension finie simple de K, engendrée par une racine α d'un polynôme unitaire et irréductible F(x) dans O[x]. La réduction F(x) modulo M se factorise comme $F(x) = \prod_{i=1}^{t} \varphi_i(x)^{l_i}$, où $\varphi_i(x)$ sont des polynômes unitaires irréductibles premiers entre eux.

En utilisant le lemme de Hensel, nous trouvons une décomposition de F(x) sur le hensélisé K^h de K. Les techniques du polygone de Newton nous permettent de raffiner les facteurs de F(x) obtenus via le lemme de Hensel, ce qui nous permet de déterminer l'irréductibilité de F(x). Cette factorisation fournit des informations sur l'ensemble des valeurs absolues sur L qui prolongent la valeur absolue donnée sur K, ainsi que sur la décomposition de l'idéal premier M dans R, la clôture intégrale de O dans L.

Nous établissons des conditions suffisantes sur le polynôme F(x) pour décrire toutes les valeurs absolues sur L qui prolongent la valeur absolue donnée et nous examinons l'unicité de ces extensions. Plus précisément, nous considérons trois cas :

1. Lorsque F(x) est une puissance d'un polynôme unitaire et irréductible $\varphi(x)$ dans Ƒ [x] pour un certain polynôme unitaire $\varphi(x)$ dans O[x], et le φ-polygone de Newton $N_{\varphi}(F)$ a un seul segment de pente 1.
2. Lorsque F(x) est une puissance d'un polynôme unitaire et irréductible $\varphi(x)$ dans Ƒ [x] pour un certain polynôme unitaire $\varphi(x)$ dans O[x], le φ-polygone de Newton $N_{\varphi}(F)$ a un seul segment de pente λ et de degré d, et le polynôme résiduel $R_{\lambda}(F)(y)$ est irréductible sur $Ƒ_{\varphi}$.
3. Lorsque F(x) est une puissance d'un polynôme unitaire et irréductible $\varphi(x)$ dans Ƒ [x] pour un certain polynôme unitaire $\varphi(x)$ dans O[x], le φ-polygone de Newton $N_{\varphi}(F)$ a un seul segment de pente λ et de degré d, et le polynôme résiduel $R_{\lambda}(F)(y)$ est une puissance d'un polynôme irréductible unitaire $\psi(y)$ dans $Ƒ_{\varphi}[y]$.

Pour chaque cas, nous déterminons l'indice de ramification et le degré résiduel de l'extension.

De plus, nous appliquons ces techniques à l'étude de la monogénéité des corps de nombres, en nous concentrant sur l'existence de bases entières de puissances. Plus précisément, nous étudions la monogénéité des corps de nombres définis par les polynômes irréductibles $F(x) = x^{84} - m$, où $m \neq \pm 1$ est un entier sans carré. Plusieurs exemples illustratifs sont fournis.

Mots-clés :

Corps valué - Corps de nombres - Base intégrale de puissances - Monogénéité - Théorème d'Ore - Factorisation des idéaux premiers - Polygone de Newton - Indice de ramification - Valeur absolue ultramétrique - Irréductibilité.

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES
«SCIENCES ET TECHNIQUES ET
SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراه « العلوم والتقنيات
والعلوم الطبية»

NEWTON POLYGONS AND THEIR APPLICATIONS IN VALUATION THEORY AND NUMBER THEORY

Abstract :

This work explores the application of Newton polygon techniques to address three fundamental problems in valuation theory and number theory, namely, the extension of ultrametric absolute values, the factorization and irreducibility of polynomials over valued fields, and the monogeneity of number fields.

We begin by examining a valued field (K, O), where O is a rank-one discrete valuation ring, M is its maximal ideal, and $\mathbb{F} = O/M$ is the residue field. Let L be a simple finite extension of K, generated by a root α of a monic irreducible polynomial F(x) in O[x]. The reduction of the polynomial F(x) modulo M factors as $F(x) = \prod_{i=1}^{t} \varphi_i(x)^{l_i}$, where $\varphi_i(x)$ are monic coprime irreducible polynomials.

Using Hensel's Lemma, we find a splitting of F(x) over the Henselization K^h of K. Newton polygon techniques enable us to refine the factors of F(x) obtained via Hensel's Lemma, allowing us to determine the irreducibility of F(x). This factorization provides insight into the set of absolute values on L that extend the given absolute value on K, as well as the decomposition of the prime ideal M in R, the integral closure of O in L.

We establish sufficient conditions on the polynomial F(x) to describe all absolute values on L that extend the given absolute value, and we examine the uniqueness of these extensions. Specifically, we consider three cases:

1) When F(x) is a power of a monic irreducible polynomial $\varphi(x)$ in $\mathbb{F}$ [x] for some monic $\varphi(x)$ in O[x], and the φ-Newton polygon $N_\varphi(F)$ has a single side of degree 1.
2) When F(x) is a power of a monic irreducible polynomial $\varphi(x)$ in $\mathbb{F}$ [x] for some monic $\varphi(x)$ in O[x], the φ-Newton polygon $N_\varphi(F)$ has a single side of slope λ and degree d, and the residual polynomial $R_\lambda(F)(y)$ is irreducible over $\mathbb{F}_\varphi$.
3) When F(x) is a power of a monic irreducible polynomial $\varphi(x)$ in $\mathbb{F}$[x] for some monic $\varphi(x)$ in O[x], the φ-Newton polygon $N_\varphi(F)$ has a single side of slope λ and degree d, and the residual polynomial $R_\lambda(F)(y)$ is a power of a monic irreducible polynomial $\psi(y)$ in $\mathbb{F}_\varphi[y]$.

For each case, we determine the ramification index and residual degree of the extension.

Additionally, we apply these techniques to study the monogeneity of number fields, with a focus on the existence of power integral bases. Specifically, we study the monogeneity of number fields defined by an irreducible polynomial $F(x) = x^{84} - m$, where $m \neq \pm 1$ is a square-free integer. Several illustrative examples are provided.

Key Words :

Valued field - Number field - Power integral basis - Monogeneity - Theorem of Ore - Prime ideal factorization - Newton polygon - Index of ramification - Ultrametric absolute value - Irreducibility.