

| Nom et prénom                        | Etablissement                                                                | Grade                         | Qualité                   |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| Pr ECH-CHERIF<br>EL KETTANI Mustapha | Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,<br>USMBA, Fès                           | PES                           | Président                 |
| Pr OUHADAN Abdelaziz                 | Centre Régional des Métiers de l'Education<br>et de la Formation, Fès-Meknès | PES                           | Rapporteur &<br>Examineur |
| Pr AIT BEN HADDOU<br>Malika          | Faculté des Sciences, UMI, Meknès                                            | PES                           | Rapporteur &<br>Examineur |
| Pr KADAoui ABBASSI<br>Mohamed Tahar  | Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,<br>USMBA, Fès                           | PES                           | Rapporteur &<br>Examineur |
| Pr MAHDOU Najib                      | Faculté des Sciences et Techniques,<br>USMBA, Fès                            | PES                           | Examineur                 |
| Pr ZGUITTI Hassane                   | Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,<br>USMBA, Fès                           | PES                           | Examineur                 |
| Pr EL KAOUTIT ZERRI<br>Laiachi       | Université de Grenade, Espagne                                               | Catedratico de<br>Universidad | Examineur                 |
| Pr MOUANIS Hakima                    | Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,<br>USMBA, Fès                           | PES                           | Directeur de<br>thèse     |
| Pr CHOULLI Hanan                     | Faculté des Sciences Dhar El Mahraz,<br>USMBA, Fès                           | MCH                           | Co-Directeur<br>de thèse  |



## Résumé :

La théorie des catégories offre une approche unifiée à des structures mathématiques a priori non liées. Cette perspective novatrice conduit à de nouvelles perspectives et révèle généralement des résultats inattendus. Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie des catégories, en mettant l'accent sur les catégories avec des structures supplémentaires. Son objectif est d'étudier une classe spécifique de foncteurs monoïdaux, ainsi que des concepts et propriétés catégoriques des déterminants, bases, et finitude et linéarité résiduelles. Cette exploration se divise en trois axes principaux.

Dans une catégorie monoïdale stricte rigide  $C$ , le carré du foncteur de dualité n'est pas involutif. C'est le cas lorsque  $C$  est par exemple une Ab-catégorie rubannée, auquel cas, chaque objet est réflexif, en particulier, l'objet unité  $I$ . La commutativité de l'anneau de base implique que les structures de dualité sur  $I$  sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. En général, ils ne fournissent qu'une semi-inversibilité. La présence d'un tressage dote  $C$  d'un endofoncteur monoïdal contravariant, qui n'est pas nécessairement normal. Motivés par cela, nous introduisons et étudions, dans le premier axe de cette thèse, une classe intermédiaire appelée foncteurs monoïdaux semi-normaux, positionnée entre les classes des foncteurs monoïdaux et monoïdaux normaux. Nous fournissons plusieurs exemples pour illustrer la non trivialité de cette classe, et établissons que toute catégorie monoïdale tressée rigide à gauche (ou à droite) admet un endofoncteur monoïdal et comonoïdal contravariant semi-normal, et que toute Ab-catégorie monoïdale admet un foncteur monoïdal contravariant semi-normal vers la catégorie des modules sur l'anneau de base de  $C$ .

Dans la deuxième partie, nous introduisons et étudions ce que nous appelons les déterminants quantiques comme une formulation catégorique des déterminants commutatifs dans le cadre des catégories rubannées semi-simples, au sens de Turaev, puis nous plongeons dans leur généralisation dans les catégories pivotales et sphériques. En particulier, nous introduisons une notion catégorique de  $R$ -base, pour une relation de compatibilité  $R$ , et construisons une large catégorie monoïdale stricte dont les objets sont des bases sur des objets d'une Ab-catégorie monoïdale rigide donnée, et dont les morphismes sont donnés par les morphismes entre les objets sous-jacents, sujet à des axiomes de cohérence adéquats. Une utilisation systématique du langage graphique est employée dans la preuve de certains résultats, mettant en évidence comment les manipulations géométriques servent à établir des résultats purement algébriques. Nous définissons le déterminant quantique de tout endomorphisme donné comme un élément de l'anneau commutatif de base de la catégorie tel que, nous exigeons à la fois les traces et dimensions quantiques dans ce contexte. En passant au cadre des catégories pivotales, nous obtenons des concepts de déterminants quantiques à gauches et à droites qui coïncident lorsque la catégorie est sphérique. De plus, nous introduisons des fonctions de rang quantiques sur de telles catégories, sur les objets ainsi que sur les morphismes, satisfaisant aux conditions habituelles de normalisation, d'inégalité triangulaire et de condition idéale.

Au-delà des structures monoïdales, les groupoïdes, en tant que catégories dans lesquelles tous les morphismes sont inversibles, fournissent un cadre catégorique intéressant. Dans la troisième partie de cette thèse, nous introduisons et étudions les notions de linéarité et de finitude résiduelles pour les groupoïdes, en particulier pour des constructions universelles de groupoïdes, puis les comparons. Nous introduisons la classe particulière des groupoïdes simples, que nous étudions, caractérisons et pour laquelle nous examinons les propriétés mentionnées précédemment. Nous examinons également le processus de dualité de Tannaka pour un groupoïde transitif, qui conduit à un objet universel appelé l'algèbroïde de Hopf des fonctions représentatives.

## Mots clés :

Ab-catégories rubannées et pivotales, Foncteur monoïdal normal, Semisimplicité, Déterminants quantiques, Linéarité résiduelle, Finitude résiduelle, Fonctions représentatives, Groupoïde des caractères, Théorie des représentations, Trace catégorique.



## QUANTUM DETERMINANTS IN MONOIDAL CATEGORIES, AND RESIDUALLY LINEAR GROUPOIDS

### Abstract :

The theory of categories provides a unified approach to a priori unrelated mathematical structures. This novel perspective leads to new insights and usually unveils unexpected results. This thesis fits within category theory, with emphasis on categories with additional structures. Its goal is to study a specific class of monoidal functors, and categorical concepts and properties of determinants, bases and residual finiteness, linearity. This exploration will split into three main axes.

In a rigid strict monoidal category  $C$ , the square of the duality functor is not involutive. It is so when  $C$  is for instance a ribbon Ab-category, in which case, every object is reflexive, in particular, the unit object  $I$ . Commutativity of the ground ring implies that the duality maps on  $I$  are inverse isomorphisms of each other. In general, they provide only a semi-invertibility. The presence of a braiding endows  $C$  with a contravariant monoidal endofunctor which is not necessarily normal. Motivated by this, we introduce and study, in the first axis of this thesis, an intermediate class termed semi-normal monoidal functors, positioned between the classes of monoidal and normal monoidal functors. We provide several examples to illustrate the non-trivial nature of this class, and establish that any left (or right) rigid braided category admits a contravariant semi-normal monoidal and comonoidal endofunctor, and that any monoidal Ab-category admits a contravariant semi-normal monoidal functor to the category of modules over the ground ring.

In the second part, we introduce and study what we call quantum determinants as a categorical formulation of the commutative determinants in the setting of semisimple, in the sense of Turaev, ribbon categories, then we delve into their generalization within pivotal and spherical categories. In particular, we introduce a categorical notion of  $R$ -basis, for a compatibility relation  $R$ , and construct a large strict monoidal category whose objects are bases on objects of a given rigid monoidal Ab-category, and whose morphisms are given by the morphisms between the underlying objects, subject to adequate coherence axioms. A systematic use of string diagrams is employed in the proof of some results, highlighting how geometric manipulations serve in establishing purely algebraic results. We define the quantum determinant of any given endomorphism as an element of the ground commutative ring of the category such that, we require both quantum traces and dimensions in this context. By passing to the framework of pivotal categories, we obtain left and right quantum determinants concepts which coincide when the category is spherical. Moreover, we introduce quantum rank functions on such categories, on objects as well as on morphisms, satisfying the usual conditions of normalization, triangular inequality and the ideal condition.

Beyond monoidal structures, groupoids, as categories in which all morphisms are invertible, provide an interesting categorical setting. In the third part of this thesis, we introduce and study the notions of residual linearity and residual finiteness, and compare them. We investigate the Hopf algebroid of representative functions for a transitive groupoid, particularly through the Tannaka duality process which enables the construction of the character groupoid. We prove that representative functions of this latter separate its morphisms. We use this to show that the character groupoid is always residually linear. We also explore the extent to which a residually linear group can be reconstructed from its Hopf algebra of representative functions. Additionally, we examine the aforementioned properties for the specific class of simple groupoids which we study and provide structure theorems, and for basic constructions such as the semi-direct product groupoid.

### Key Words :

Ribbon and pivotal Ab-categories, Normal monoidal functor, Semisimplicity, Quantum determinants, Residual linearity, Residual finiteness, Representative functions, Characters groupoid, Representation theory, Categorical trace.