جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDALLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MEHRAZ FES

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES
«SCIENCES ET TECHNOLOGIES

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **: SHIMI Mohammed**

Soutiendra **: le 06/03/2021** à **09 h** Lieu **: Centre Visioconférence**

une thèse intitulée :

Study of Some Nonlinear Nonlocal problems in Fractional Sobolev Spaces with Variable Exponent.

En vue d'obtenir le Doctorat
FD : Mathématiques et Applications (MA)
Spécialité: Equations aux dérivées partielles (EDP)

Devant le jury composé comme suit :

	NOM ET PRENOM	GRADE	ETABLISSEMENT
Président	Pr. EL AMRI Hassan	PES	Université Hassan II ,ENS - Casablanca
Directeur de thèse	Pr. AZROUL Elhousseine	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
Co-directeur De thèse (invité)	Pr. BENKIRANE Abdelmoujib	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
Rapporteurs	Pr.AGARWAL Ravi P	PES	Université Texas A &M-Kingsville - Etats - Unis
	Pr. RAGUSA Maria Alessandra	PES	Université de Catane - Italie
	Pr. AKDIM Youssef	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
Membres	Pr. HAMMOUCH Zakia	PES	Université Moulay Ismail ENS - Meknès
	Pr. BENNOUNA Jaouad	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
	Pr. MELLIANI Said	PES	Université Sultan Moulay Slimane - FST- Béni Mellal

Résumé :

Il ne fait guère de doute que les espaces classiques de Lebesgue et de Sobolev (L^p, $W^{m,p}$ avec $m \in N$) ont été et sont l'épine dorsale (au sens le plus large du terme) de la théorie des espaces de fonction et des EDP's depuis son apparition jusqu'à aujourd'hui. Avec l'émergence des problèmes non linéaires dans les sciences appliquées, ces espaces ont montré leurs limites dans les applications. Comme solution, les espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable, $L^{p(x)}$, $W^{m,p(x)}$, sont intéressants non seulement pour leurs théorie abstraite mais aussi pour leurs application à une grande variété des disciplines sociales et scientifiques. Les problèmes non linéaires à croissance d'exposant variable constituent un nouveau domaine de recherche et reflètent un nouveau type de phénomènes physiques. D'autre part, l'étude des espaces de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}$, $s \in (0,1)$, est un sujet classique de l'analyse fonctionnelle et harmonique, par ailleurs, la théorie de ces espaces a été largement appliquée dans différentes applications concrètes du monde réel. Il est donc naturel de se demander quels résultats peuvent être "récupérés" lorsqu'on combine le cas d'exposant variable avec le cas d'ordre de dérivation fractionnaire. La réponse à cette question nous a conduits à un nouveau type d'espaces fonctionnels. C'est l'espace de Sobolev fractionnaire à exposant variable $W^{s,p(x,y)}$ qui a été introduit en 2017.

Alors, notre objectif dans cette thèse est de poursuivre l'étude de ces nouveaux types d'espaces fonctionnels et leurs problèmes non locaux associés. Notre contribution à ce sujet se traduit par la redéfinition de ces espaces pour donner une vraie généralisation du cas d'exposant constant et aussi pour formuler correctement les conditions aux bords de Dirichlet dans l'étude des problèmes non locaux. En outre, nous étendons l'espace $W^{s,p(x,y)}$ pour inclure le cas fractionnaire général $W^{s,p(x,y)}$ avec un noyau singulier et symétrique K. De plus, nous établissons quelques propriétés qualitatives de ces espaces telles que la complétude, la séparabilité, la réflexivité, la convexité uniforme et la densité. Nous avons également montré des différents résultats d'injections continues et compacts (dans les espaces de Lebesgue généralisés (avec poids) et les espaces d'Hölder). De plus, nous présentons l'opérateur p(x,.)-Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s_{p(x,.)}$ et son opérateur integro-différentiel généralisé $\mathscr{L}^{p(x,.)}_K$. Nous montrons aussi certaines propriétés fonctionnelles de ces opérateurs. Par suite, à l'aide de différentes méthodes variationnelles et de théorèmes des points critiques, nous étudions plusieurs classes d'équations non locales et des problèmes de type Kirchhoff impliquant ces opérateurs non locaux et non linéaires.

Ainsi, le présent travail peut être considéré comme une introduction aux espaces de Sobolev fractionnaires à exposant variable et leurs problèmes correspondants. Par ailleurs, il fournit aux chercheurs et aux étudiants une introduction approfondie à l'analyse variationnelle des problèmes non linéaires décrits par les opérateurs non locaux à exposant variable.

Mots clés :
Espaces de Sobolev fractionnaires à exposant variable, Opérateur p(x,.)-Laplacien fractionnaire, Noyau symétrique et singulier, Opérateur p(x,.)-intégro-différentiel généralisé, Résultats d'injections continues et compactes, Problèmes aux limites (Bi)-non-locaux, Problèmes de type Kirchhoff, Méthodes variationnelles, Théorie des points critiques.

Abstract :

There is hardly any doubt that Lebesgue and Sobolev spaces (L^p, $W^{m,p}$ with $m \in N$) were and are the backbone (in the widest sense of the word) of the theory of function spaces and PDE's from the very beginning up to our time. With the emergence of nonlinear problems in applied sciences, classical Lebesgue and Sobolev spaces demonstrated their limitations in applications. As a solution, variable exponent Lebesgue-Sobolev spaces, $L^{p(x)}$, $W^{m,p(x)}$, are interesting not only in their abstract theory but also for their application to a wide variety of problems in applied disciplines. Where their related class of nonlinear problems with variable exponent growth is a new research field and it reflects a new kind of physical phenomena. On the other hand, The study on fractional Sobolev space $W^{s,p}$, $s \in (0, 1)$, is a classical topic in functional analysis and harmonic analysis and the theory of these spaces has been widely applied in different concrete real-world applications. It is therefore, a natural question to see what results can be "recovered" when we combine between the variable exponent case and fractional order derivative case. The answer to this question led us to a new kind of functional spaces. It is the fractional Sobolev space with variable exponent $W^{s,p(x,y)}$ which introduced in 2017.

Hence, our aim in this thesis is to keep on the study of these new types of functional spaces and their associated nonlocal problems. Our contribution to this topic is reflected in the redefinition of these spaces in order to give a true generalization of the constant exponent case and also to formulate correctly the Dirichlet boundary conditions in the study of nonlocal problems. In addition, we extend the space $W^{s,p(x,y)}$ to include the general fractional case $W^{s,p(x,y)}$ with a suitable singular symmetric kernel K. Moreover, we establish some of their qualitative properties such as completeness, separability, reflexivity, uniform-convexity, and density. Furthermore, different versions of continuous and compact embedding results are proved (into variable exponent Lebesgue spaces (with weight) and Hölder spaces). Furthermore, we present the fractional p(x,.)-Laplacian operator $(-\Delta)^s p(x,.)$ and its integro-differential generalized operator $\mathcal{L}^{p(x,.)}$ and we show some of their functional properties. Accordingly, by means of different variational methods and critical points theorems, we investigate different classes of nonlocal equations and Kirchhoff type problems involving these nonlinear nonlocal operators.

Thence, the present work can be seen as an introduction to the fractional Sobolev spaces with the variable exponent and their related problems. Moreover, provides researchers and graduate students with a thorough introduction to the variational analysis of nonlinear problems described by nonlocal operators with variable exponent.

Key Words :

Fractional Sobolev spaces with variable exponent, Fractional *p*(*x*,.)-Laplacian operator, Singular symmetric kernel, *p*(*x*,.)-integro-differential generalized operator, Continuous and compact embedding results, (Bi)-Nonlocal boundary value problems, Kirchhoff type problems, Variational methods, Critical points theory.