جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDALLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MEHRAZ FES

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **: LAKRINI Ibrahim**
Soutiendra **: le 14/03/2020** à **15h** **Lieu : Centre de conférences à la FSDM**

Une thèse intitulée :
Géométrie Riemannienne des fibrés vectoriels

En vue d'obtenir le Doctorat

FD : Mathématiques et Applications (MA)
Spécialité: Géometrie

Devant le jury composé comme suit :

	NOM ET PRENOM	GRADE	ETABLISSEMENT
Président	Pr. LAMRINI Faycal	PES	Faculté des Sciences, Dhar El Mahraz - Fès
Directeur de thèse	Pr. KADAOUI ABBASSI Mohamed Tahar	PH	Faculté des Sciences, Dhar ElMahraz - Fès
Co-directeur de thèse	Pr. KHELDOUNI Abdelaziz	PES	Faculté des Sciences, Dhar El Mahraz - Fès
Rapporteurs	Pr.TAJMOUATI Abdelaziz	PES	Faculté des Sciences, Dhar El Mahraz - Fès
	Pr. IKEMAKHEN Aziz	PES	Faculté des Sciences et Techniques - Marrakech
	Pr. FAHLAOUI Said	PES	Faculté des Sciences - Meknès
Membres	Pr. BOUCETTA Mohamed	PES	Faculté des Sciences et Techniques - Marrakech
	Pr. ASSIM Jilali	PES	Faculté des Sciences - Meknès

Résumé:

La géométrie des fibrés vectoriels constitue un champs fertile de recherche en géométrie Riemannienne. Les fibrés vectoriels forment une large classe de variétés qui possèdent des propriétés géométriques intéressantes et un grand nombre d'applications à la fois en géométrie différentielle et en physique mathématique. Les efforts dans cette direction ont commencé dans les années 1950, lorsque S. Sasaki a introduit sa fameuse métrique `naturelle' sur le fibré tangent d'une variété Riemannienne.

Par la suite, la métrique de Sasaki a été intensément étudiée par plusieurs géomètres. Cependant la métrique a montré une `rigidité exteme'. Par conséquent, plusieurs géomètres ont introduit d'autres (classes de) métriques, dont la plus large est la classe des métriques g-naturelles sur le fibré tangent, généralisant la métrique de Sasaki, et obtenue suite à une classification utilisant les théories des jets et des fibrés vectoriels naturels.

Le succès universel de la géométrie Riemannienne du fibré tangent a conduit certains géomètres à généraliser des métriques connues dans le contexte du fibré tangent au contexte des fibrés vectoriels. Parmi les métriques qui ont été généralisées on trouve la métrique de Sasaki, la métrique de Cheeger-Gromoll, et les métriques de Cheeger-Gromoll généralisées. Etant donné un fibré vectoriel (E,π,M), au-dessus d'une variété Riemannienne (M,g), muni d'une métrique fibré h et d'une connexion compatible D, R. Albuquerque a récemment introduit une classe de métriques, à deux poids φ_1 et φ_2, dépendant du carré de la norme, qui généralise la métrique de Sasaki. Ces métriques ont été appelées les métriques à symétrie sphérique. Cette thèse est consacrée à l'étude des métriques à symétrie sphérique. Une étape clé été réalisée lorsque on a montré que les projections des fibrés vectoriels, munis des métriques à symétrie sphérique, sont des submersions horizontalement conformes avec une fonction de dilatation donnée par $\lambda=e^{-\varphi_1}$. Ceci nous a permis d'utiliser la machinerie technique forte, contenue dans le travail de B. O'Neill dans le contexte des submersions Riemanniennes, et sa généralisation, par S. Gudmundsson, dans le cadre des submersions horizontalement conformes.

On commence par l'étude des géodésiques et de la complétude des métriques à symétrie sphérique. On adopte la meme approche utilisée par O'Neill dans son traitement des géodésiques des submersions Riemanniennes. En particulier, on donne les EDOs qui décrivent les géodésiques et en déduire quelques exemples. Ensuite, on traite la question de complétude. R.Albuquerque a conjecturé que l'espace total d'un fibré vectoriel, muni d'une métrique à symétrie sphérique, est complet si et seulement si la base et les fibres sont complets. On répond affirmativement à cette question sans meme supposer la complétude des fibres, mais sous une condition de bornétude sur la fonction de dilatation. En effet, on montre que

Si l'espace total E est muni d'une métrique Riemannienne telle que la projection $\pi:(E,G)\longrightarrow (M,g)$ est une submersion horizontalement conforme à dilatation bornée, alors (E,G) est complet si et seulement si la variété de base (M,g) est complète.

En particulier, on applique le résultat précédent aux métriques à symétrie sphérique et aux métriques de Cheeger-Gromoll généralisées. Précisément, on montre que

Supposons que l'espace total E est muni d'une m\'{e}trique G appartenant \`{a} l'une des classes suivantes:

1) métriques à symétrie sphérique avec des poids φ_{1} et φ_2, tels que φ_1 est bornée;

2) métriques de Cheeger-Gromoll généralisées.

Alors, la variété Riemannienne (E,G) est complète si et seulement la variété de base (M,g) est complète.

De plus, notre résultat principal s'applique aussi à une sous classe de métriques g-naturelles sur le fibré tangent et le fibré tangent unitaire, à savoir les métriques de type Kaluza-Klein.

Par la suite, on étudie les symétries infinitésimales relativement aux métriques à symétrie sphériques, notamment les champs de vecteurs fermés, conformes et de Killing. On construit plusieurs exemples de champs de vecteurs conformes. En particulier, on explore les relèvements horizontaux des champs de vecteurs de la base ainsi que les relèvements verticaux des sections du fibré considéré.

Dans le cas des relèvements de horizontaux, on démontre le résultat suivant

Soit X un champ de vecteurs sur la base. Alors les assertions suivantes sont \'{e}quivalentes:
1) X^h est conforme sur E;
2) X^h est un champs de Killing sur E;
3) X est un champs de Killing sur M et $R^E(X,.)$,

avec X^h est le rel\`{e}vement horizontal de $X$ par rapport \`{a} D et R^E est la courbure de D.
En effet, on montre une forme plus générale du résultat précédent pour des champs de vecteurs horizontaux, pas nécessairement des relèvements horizontaux.

De l'autre côté, on caractérise les champs de vecteurs verticaux conformes. En particulier, pour les relèvements verticaux des sections, on montre le résultat suivant

Soit σ une section non-nulle de E. Alors le relèvement vertical σ^v est un champ conforme de fonction potentille f si et seulement si les assertions suivantes sont vérifiées
1) $f(e)=\varphi_1'(r)h(σ(\pi(e)),e)$, pour tout $e\in E$, avec $r=h(e,e)$;
2) $\varphi_1'=\varphi_2'$ sur $\mathbb{R}^+$;
3) σ est parallèle.

En plus, on donne une classification des champs de vecteurs de Killing horizontaux, et on se focalise sur les champs de vecteurs gradients de certaines classes de fonctions.
Les courbures des métriques à symétrie sphérique sont, ensuite, intensément étudiées. On commence par la question d'hérédité. Précisément, on montre que

Si l'espace total E muni d'une métrique à symétrie sphérique est plat, de courbure sectionnelle constante, d'Einstein ou de courbure scalaire constante, alors la variété de base possède la meme propriété, respectivement.
Plus intéressante encore est l'étude de la question inverse, c'est-à-dire voir quand l'espace total possède une propriété géométrique remarquable sachant que la base la possède. Premièrement, on caractérise la platitude des métriques à symétrie sphérique. Précisément, on montre que

Une métrique à symétrie sphérique est plate si et seulement si la base est une variété Riemannienne plate, la connexion est plate et les fonctions poids sont constantes.
De plus, on montre plusieurs résultats de rigidité des métriques à symétrie sphérique concernant la courbure sectionnelle. Par exemple, on montre
Soit G une métrique à symétrie sphérique avec fonctions poids φ_1 et φ_2. Supposons que φ_1 atteint son minimum à zero (e.g. φ_1 est croissante). Si l'espace total (E,G) est à une courbure sectionnelle constante, alors la connexion est plate, la base est plate et les fonctions poids sont constantes. Ce qui est équivalent à la platitude.
En conséquence, nous étions forcés à étudier le signe de la courbure sectionnelle ou à chercher des métriques à symétrie sphérique à courbure sectionnelle bornée. On construit, dans le cas des connexions plates, des exemples de métriques à symétrie sphérique à courbure sectionnelle bornée.

Puis, dans le meme esprit, on étudie les propriétés géométriques reliées au tenseur de courbure de Ricci. En particulier, on construit, lorsque la connexion est plate, une famille à deux paramètres de métrique d'Einstein parmi les métriques à symétrie sphériques.

D'autres résultats de rigidité, relativement à la courbure de Ricci, sont démontrés. Par exemple, on a
Supposons que E est un fibré en droites muni d'une métrique à symétrie sphérique telle que $\varphi_1=0$. Alors (E,G) est une variété d'Einstein si et seulement si elle est Ricci-plate, (M,g) est Ricci-plate et D est plate.
et

Supposons que le rang $k\geq 2$ et (E,G) est Ricci-plate. Si la fonction $r\mapsto r\varphi_2'(r)$ est décroissante, alors D est plate, (M,g) est Ricci-plate et φ_2 est constante. La réciproque est aussi vraie.

Ensuite, on montre d'autres résultats de rigidité concernant la courbure de Ricci dans le cas d'une connexion arbitraire et dans le cas d'une connexion plate.
Concernant la courbure scalaire, on montre une multitude de résultats de rigidité. Par exemple, dans le cas d'un fibré en droites, on montre le résultat suivant
Soit (E,G) un fibré en droites muni d'une métrique à symétrie sphérique G, alors (E,G) est \`{a} courbure scalaire constante $\widetilde{Sc}$ si et seulement si $(M,g)$ est \`{a} courbure scalaire constante $Sc=\widetilde{Sc}$ et la connexion D est plate.

On montre encore, pour des fibr\'{e}s vectoriels de rang 2, que :
Soit E un fibr\'{e} vectoriel de rang $k=2$. Supposons que E est muni d'une m\'{e}trique \`{a} sym\'{e}trie sph\'{e}rique $G$ avec fonctions poids $\varphi_1$ et $\varphi_2$, telles que la fonction $r\mapsto r\varphi_{2}'(r)$ est croissante et $\varphi_2'(0)=0$. Si $(E,G)$ est \`{a} courbure scalaire constante, alors (M,g) est \`{a} courbure scalaire constante, D est plate et φ_2 est constante.

Des résultats similaires, pour les rangs supérieurs, sont établis sous des conditions sur les signes et la monotonie des fonctions poids. Particulièrement, on généralise plusieurs résultats de rigidité connus dans le cas de la métrique de Sasaki.

Une propriété géométrique qui est étudiée dans le cas connexions plates est le fait d'etre localement symétrique. On montre le résultat suivant
Supposons que le rang $k\geq 2$, la connexion D est plate et G une métrique à symétrie sphérique sur E. Alors (E,G) est localement symétrique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées
1) φ_1 est constante;
2) ou bien φ_2 est constante ou $\varphi_2(r)=-\ln(r+c)$, pour tout $r\in \mathbb{R}^+$, pour une constante $c\geq 0$;
3) (M,g) est localement symétrique.

Finalement, on se focalise sur les sections harmoniques. On considère alors les trois problèmes suivants d'harmonicité pour les sections:
1) sections harmoniques comme applications ;
2) points critiques de la fonctionnelle d'énergie mais avec des variations constituées par des sections ;
3) l'harmonicité verticale, c'est-à-dire le fait d'etre un point critique de la fonctionnelle d'énergie.
Pour chaqu'un de ces problèmes, on donne les équations d'Euler-Lagrange. A cause de la complexité de ces équations, on est forcé de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour les sections

parallèles et celles de longueurs constantes. En particulier, on généralise un résultat de J. Konderak, comme suit
Supposons que M est compacte et E est muni d'une m\'{e}trique \`{a} sym\'{e}trie sph\'{e}rique avec fonctions poids φ_1 et φ_2. Si φ_1' est positive et $(1+2r\varphi_2')$ est strictement positive sur $\Sigma_{\sigma}:=\{r=h(\sigma,\sigma)(x):\: x\in M\}$ (resp. φ_1' est n\'{e}gative
et $(1+2r\varphi_2')$ est strictement n\'{e}gative sur Σ_{σ}). Si une section σ de E est harmonique alors elle est parall\`{e}le et sa norme constante est
$r=h(\sigma,\sigma)$. De plus, si $\varphi_1'\neq 0$, alors $\sigma=0$.
Enfin, on donne des exemples de sections harmoniques.

Mots clés : Fibré vectoriel, connexion, métrique Riemannienne, métrique à symétrie sphérique, complétude, symétrie, courbure, application harmonique, section harmonique.

RIEMANNIAN GEOMETRY OF VECTOR BUNDLES

Abstract :

The geometry of vector bundles constitutes an interesting research area in Riemannian geometry. Vector bundles form a large class of manifolds with very tempting geometric properties along with a large number of potential applications. They lay at the heart of many current problems of differential geometry and mathematical physics. Hence the importance of investigating the Riemannian geometry of those spaces. The endeavours in this direction could be traced back to the 1950s, when Shigeo Sasaki introduced his famous `natural' metric in the case of tangent bundles.
Subsequently, the Sasaki metric was extensively studied, but it turns out to be very rigid. Next, many geometers introduced generalizations of the Sasaki metric. Particularly, a classification of all `natural' metrics was accomplished based on jet theory and natural vector bundles, which leads eventually to the discovery of the large class of g-natural metrics.
The universal success of the Riemannian geometry of tangent bundles lead many geometers to generalize many known metrics to the framework of vector bundles in general. Among those metrics, we find the Sasaki metric, the Cheeger-Gromoll metric and the generalized Cheeger-Gromoll metrics. Recently, on a vector bundle (E,π,M), over a Riemannian base (M,g), endowed with a fiber metric h and a compatible connection D, R. Albuquerque introduced a class of metrics which generalize the Sasaki metric, with two weights φ_1 and φ_2 depending only on the square norm of the vector. They were called \emph{spherically symmetric metrics}. This thesis is devoted to the study of spherically symmetric metrics. A key step is made when we prove that the projections of vector bundles with spherically symmetric metrics are \emph{horizontally conformal submersions} with \emph{dilation function} $\lambda=e^{-\varphi_1}$. This provides us with a very rigid technical machinery, namely the results of B. O'Neill on Riemannian submersions and their generalizations to the case of horizontally conformal submersions in the work of S. Gudmundsson.
We shall begin by geodesics and completeness of spherically symmetric metrics. We adopt the same approach used by O'Neill in his investigations of geodesics of Riemannian submersions. So, we will give the ODEs describing geodesics and we will derive some examples. Then, we tackle the question of completeness. R.Albuquerque conjectured that the total space endowed with a spherically

symmetric metric is complete if and only if the base and fibers are complete. We will answer the question in affirmative without assuming the completeness of fibers, but under a condition on one of the weight functions. In fact, we prove that

If the total space E is endowed with a Riemannian metric for which the projection $\pi:(E,G)\longrightarrow (M,g)$ is a horizontally conformal submersion with bounded dilation, then (E,G) is complete if and only if (M,g) is complete.

In particular, this applies to spherically symmetric metrics as well as generalized Cheeger-Gromoll metrics. More precisely, we will prove the following

Assume the total space is endowed with a metric G belonging to one of the following classes
1) Spherically symmetric metrics with weights φ_{1} and φ_2, such that φ_1 is bounded;
2) Generalized Cheeger-Gromoll metrics.
Then, the Riemannian manifold (E,G) is complete if and only if the base manifold (M,g) is complete.

The main theorem applies also to a subclass of g-natural metrics on tangent bundles and tangent sphere bundles, namely Kaluza-Klein type metrics.
We will investigate the symmetries of spherically symmetric metrics. We will study closed, conformal and Killing vector fields. We also construct many examples of conformal vector fields. In particular, we will study horizontal lifts of vector fields on the base and vertical lifts of sections. In the case of horizontal lifts, we will prove the following result
Let X be a vector field on the base. Then the following are equivalent
\begin{itemize}
1) X^h is conformal on E;
2) X^h is a Killing vector field on E;
3) X is a Killing vector field on M and $R^E(X,.)$.
Where X^h denotes horizontal lift of X with respect to D and R^E is the curvature of D.

In fact, we will prove a general form of the previous result for horizontal vector field not necessarily horizontal lifts.

On the other hand, we will characterize conformal vertical vector fields. In particular, for vertical lifts of sections, we will prove the following result

Let σ be a non-zero section. Then the vertical lift σ^v is a conformal vector field with potential function f if and only if the following assertions hold
1) $f(e)=\varphi_1'(r)h(σ(\pi(e)),e)$, for all $e\in E$, where $r=h(e,e)$;
2) $\varphi_1'=\varphi_2'$ on $\mathbb{R}^+$;
3) σ is parallel.

Moreover, we will give a classification result of horizontal Killing vector fields. At the end we focus on gradient vector fields of certain classes of functions.
The curvature properties of spherically symmetric metrics will be heavily studied. We begin by the question of heredity. Precisely, we will prove that

If the total space endowed with a spherically symmetric metric is flat, of constant sectional curvature, an Einstein metric or of constant scalar curvature, then the base space possesses the same property, respectively.

More importantly, we will study the inverse problem, that is when the total space possesses one of the previous geometric properties provided the base the same property. First, we will characterize the flatness of spherically symmetric.
Precisely, we prove that

A spherically symmetric metric is flat if and only if the base is a flat Riemannian manifold, the connection is flat and the weight functions are constant.

Furthermore, we will prove many rigidity results of spherically symmetric metrics with respect to sectional curvatures. Interestingly, we shall prove the following

Let G be a spherically symmetric metric with weights φ_1 and φ_2. Assume that φ_1 attains it minimum at zero (i.e. φ_1 is increasing). If the total space (E,G) has constant sectional curvature, then the connection is flat, the base is flat and the weight functions are constant. Which is equivalent to flatness.

Thus, we have been compelled to study the sign of sectional curvatures and to look for spherically symmetric metrics with bounded sectional curvatures. We have succeeded to construct examples of spherically symmetric metrics in the case of flat connections.

Next, we study in the same spirit the geometric properties related to the Ricci curvature tensor. In particular, we have considered the problem of finding Einstein spherically symmetric metrics. Interestingly, we will construct a two parameter family of Einstein metrics when the connection is flat.

Many rigidity results with respect to the Ricci curvature tensor will be given, for example we will prove

Assume that E is a line bundle endowed with a spherically symmetric metric such that $\varphi_1=0$. Then (E,G) is an Einstein manifold if and only it is Ricci flat, (M,g) is Ricci flat and D is flat.

and

Assume that the rank $k\geq 2$ and (E,G) is Ricci flat. If the function $r\mapsto r\varphi_2'(r)$ is decreasing, then D is flat, (M,g) is Ricci flat and φ_2 is constant. The converse also holds.

Subsequently, we will give other rigidity results concerning the Ricci curvature tensor both in the case of an arbitrary connection or a flat one.

Concerning the scalar curvature, we will prove many rigidity results. For example, in the case of line bundles, we will prove the following

Let (E,G) be a line bundle endowed with a spherically symmetric metric G, then (E,G) is of constant scalar curvature $\widetilde{Sc}$ if and only if (M,g) is of constant scalar curvature $Sc=\widetilde{Sc}$ and the connection D is flat.

Moreover, we will prove, for vector bundles with rank 2, that

Let E be a vector bundle of rank $k=2$. Assume E is endowed with a spherically symmetric metric G, with weights φ_1 and φ_2, such that the function $r\mapsto r\varphi_{2}'(r)$ is decreasing and $\varphi_2'(0)=0$. If (E,G) is of constant scalar curvature, then (M,g) is of constant scalar curvature, D is flat and φ_2 is constant.

Similar results, for higher ranks, will be proved under sign and monotonicity assumptions on the weight functions. Particularly, we will generalize known rigidity results in the case the Sasaki metric.

Another geometric property that will be studied in the case of flat connections is being locally symmetric. We will prove that

Assume that the rank $k\geq 2$, the connection D is flat and let G be a spherically symmetric metric on E. Then (E,G) is locally symmetric if and only if the following conditions hold

1) φ_1 is constant;
2) either φ_2 is constant or $\varphi_2(r)=-\ln(r+c)$, for all $r\in \mathbb{R}^+$, for a constant $c\geq 0$;
3) (M,g) is locally symmetric.

Finally, we draw attention to harmmonic sections. We consider three harmonicity problems for sections. Precisely, the :
1) Harmonic sections as maps;
2) Critical points of the energy functional but with variations through sections;
3)Vertical harmonicity, that is being a critical point of the vertical energy functional.
For each of these problems, we will derive the Euler-Lagrange equations. Facing the complexity of the equations, we shall give necessary and sufficient conditions for constant length, and eventually parallel sections. In particular, we will generalize a result of J. J. Konderak as follows

Assume that M is compact and E is endowed with a spherically symmetric metric with weights φ_1 and φ_2. If φ_1' is non-negative and $(1+2r\varphi_2')$ is positive on $\Sigma_{\sigma}:=\{r=h(\sigma,\sigma)(x):\: x\in M\}$(resp. φ_1' is non-positive and $(1+2r\varphi_2')$ is negative on Σ_{σ}), then σ is parallel and has constant norm $r=h(\sigma,\sigma)$. Moreover, if $\varphi_1'\neq 0$, then $\sigma=0$.

At the end, we will give some examples of harmonic sections.

Key Words: Vector bundle, Riemannian metric, connection, spherically symmetric metric, completeness, symmetry, curvature, harmonic sections.