Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
Mardi 07 Janvier 2020

SMP-SMC/S1
Épreuve d'Analyse 1
Durée : 1 h 30 min

N.B. : Aucun document n'est autorisé et tous les résultats doivent être justifiés

Exercice 1 : (9 points) Les questions suivantes sont indépendantes

1. Donner le prolongement par continuité au point 1 de la fonction numérique $f : x \mapsto \dfrac{(ln\,(x))^2}{x-1}$.
2. Montrer que l'équation $x + arcsin\,(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[-1,1]$ que l'on déterminera .
3. Montrer que la fonction numérique définie sur $]-\infty, 0[$ par $f\,(x) = ln\,(1-e^x)$ admet une bijection réciproque f^{-1} à déterminer .
4. En utilisant le $T.A.F$, montrer que $(\forall x > 1)$ $\frac{x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) < e^{\frac{1}{x}}$; puis déduire la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.
5. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $5ch\,(x) - 4sh\,(x) = 3$.
6. Calculer : $Arcsin\left(sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.

Exercice 2 : (9 points) Soit f la fonction numérique définie sur $I =]-1,1[$ par :

$$\begin{cases} f\,(x) = \dfrac{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 2arctan\,(x) - 4x}{x^2\ arcsin\,(x)} & si\ x \neq 0 \\ f\,(0) = 0 \end{cases} .$$

1. (a) Donner les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 2 et 4 des fonctions $u : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ respectivement .
   (b) En utilisant les développements limités au voisinage de 0 des fonctions $arcsin'$ et $arctan'$ donner les développements limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 et 5 des fonctions $arcsin$ et $arctan$ respectivement .
   (c) Montrer que pour tout x assez proche de 0, on a : $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 4x = -2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o\left(x^5\right)$.
2. (a) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4
   (b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point $O\,(0, f\,(0))$ ainsi que la position de cette tangente par rapport à cette courbe.
3. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g\,(x) = \frac{5}{4}\ x^3\ f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (a) Donner le développement limité généralisé de g à l'ordre 1 au voisinage de $-\infty$.
   (b) En déduire que la courbe de g admet la première bissectrice comme asymptote au voisinage de $-\infty$ et étudier la position de cette asymptote par rapport à cette courbe.

Exercice 3 : (4 points)

1. Calculer la limite de la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$.
2. Étudier la convergence de la suite récurrente suivante et donner sa limite :

$$u_0 = u_1 = 1\ et\ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} .$$

Bon courage

Solution :

<u>**Exercice 1**</u> : (9 points)

1. Comme

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(ln\,(x))^2}{x-1} &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{ln\,(x)}{x-1}\;ln\,(x)\\ &= 1\times 0\\ &= 0\;,\quad (\mathbf{0.5pts})\end{aligned}$$

alors le prolongement demandé est la fonction g définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} g\,(x)=f\,(x)\quad si\ x\in D_f\\ \;\;g\,(1)=0\end{array}\right.\qquad (\mathbf{0.5pts})$$

2. Comme $0+arcsin\,(0)=0$, alors 0 est une solution de l'équation en question (**0.5pts**) , et la fonction $g : x \longmapsto x + arcsin\,(x)$ est strictement croissante sur $[-1,1]$ car

$$\begin{aligned}(\forall x\in\,]-1,1[)\ \ g^{'}\,(x) &= 1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &> 0\;.\end{aligned}$$

alors 0 est l'unique solution de cette équation dans $[-1,1]$ (**0.5pts**) .

3. La fonction $x\longmapsto 1-e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-\infty,0[$ et $(\forall x<0)\ \ e^x<1\Longrightarrow 1-e^x>0$, alors $f : x\longmapsto ln\,(1-e^x)$ est continue sur $I=\,]-\infty,0[$. (**0.5pts**) D'autre part,

$$\begin{aligned}(\forall x<0)\ \ f^{'}\,(x) &= -\frac{e^x}{1-e^x}\\ &< 0\;,\end{aligned}$$

d'où f est strictement décroissante sur I, elle admet donc une bijection réciproque f^{-1} définie de $J=f\,(I)=\left]\lim_{x\to 0^+}g\,(x)),\lim_{x\to-\infty}g\,(x\right[=\,]-\infty,0[\,=I$ vers I . (**0.5pts**)
Et pour tous $(x,y)\in I^2$ on a :

$$\begin{aligned}f^{-1}\,(y)=x &\Longleftrightarrow f\,(x)=y\\ &\Longleftrightarrow ln\,(1-e^x)=y\\ &\Longleftrightarrow 1-e^x=e^y\\ &\Longleftrightarrow 1-e^y=e^x\\ &\Longleftrightarrow x=ln\,(1-e^y)\\ &\Longleftrightarrow f^{-1}\,(y)=ln\,(1-e^y)\quad (\mathbf{0.75pts})\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}f^{-1}:& I\longrightarrow I\\ & x\longmapsto f^{-1}\,(x)=ln\,(1-e^x)\quad (\mathbf{0.25pts})\,,\end{aligned}$$

c-à-d : $f^{-1}=f$.

4. Soit $x>1$, alors la fonction $f : t\longmapsto e^{\frac{1}{t}}$ est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $[x,x+1]$, donc d'après le $T.A.F$ il existe $c\in\,]x,x+1[$ tel que $\dfrac{f\,(x+1)-f\,(x)}{x+1-x}=f^{'}\,(c)$ (**0.5pts**), ou encore $(\exists c\in\,]x,x+1[) : e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{c^2}e^{\frac{1}{c}}$; et comme la fonction $g : t\longmapsto g\,(t)=\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ alors $g\,(x+1)<g\,(c)<g\,(x)$ ou encore $\frac{1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}<\frac{1}{c^2}e^{\frac{1}{c}}<\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ (**0.5pts**), d'où
$\frac{1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}<e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}<\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; donc $(\forall x>1)\ \ \frac{x^2}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}<x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)<e^{\frac{1}{x}}$. (**0.5pts**)
Et comme $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=1$, alors $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)=1$ (**0.5pts**) .

5. Le domaine d'étude de cette équation est $D_E = \mathbb{R}$, et pour tout $x \in D_E$, on a :

$$\begin{aligned}
5ch\left(x\right) - 4sh\left(x\right) = 3 &\Longleftrightarrow 5\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 4\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \ \ (\mathbf{0.5pts}) \\
&\Longleftrightarrow e^x + 9e^{-x} = 6 \\
&\Longleftrightarrow e^x + \frac{9}{e^x} = 6 \\
&\Longleftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 6e^x + 9 = 0 \quad (\mathbf{0.5pts}) \\
&\Longleftrightarrow \left(e^x - 3\right)^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow e^x - 3 = 0 \\
&\Longleftrightarrow e^x = 3 \quad (\mathbf{0.5pts}) \\
&\Longleftrightarrow x = ln\left(3\right) \ .
\end{aligned}$$

Donc les solutions , dans $\mathbb{R}$, de l'équation $5e^x - 4e^{-x} = 3$ sont $ln\left(3\right)$ $\ (\mathbf{0.5pts})$.

6.

$$\begin{aligned}
Arcsin\left(sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) &= Arcsin\left(sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= Arcsin\left(-sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \quad (\mathbf{0.5pts}) \\
&= Arcsin\left(sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \quad car\ sin\ est\ impaire \\
&= -\frac{\pi}{6}\ car\ \ -\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\mathbf{0.5pts})\ .
\end{aligned}$$

<u>Exercice 2</u> : (9 points)

1. (a) Pour tout x assez proche de 0, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \ .
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \theta\left(x^4\right) \ .$$

Donc $u\left(x\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$ $(\mathbf{1pt})$ et $v\left(x\right) = 1 - x^2 + x^4 + \theta\left(x^4\right)$ $(\mathbf{1pts})$ sont les développements limités demandés .

(b) Comme pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ $arcsin^{'}\left(x\right) = u\left(x\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \theta\left(x^2\right)$ $(\mathbf{0.5pts})$, d'où pour tout x assez proche de 0, on a :

$$\begin{aligned}
arccsin\left(x\right) &= arcsin\left(0\right) + x + \frac{x^3}{6} + \theta\left(x^3\right) \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \theta\left(x^3\right) \ \ (\mathbf{0.5pts})\ .
\end{aligned}$$

Et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ $arctan^{'}\left(x\right) = v\left(x\right) = 1 - x^2 + x^4 + \theta\left(x^4\right)$ $(\mathbf{0.5pts})$, d'où pour tout x assez proche de 0, on a :

$$\begin{aligned}
arcctan\left(x\right) &= arctan\left(0\right) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right) \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right) \ \ (\mathbf{0.5pts})\ .
\end{aligned}$$

Donc $arcsin\left(x\right) = x + \frac{x^3}{6} + \theta\left(x^3\right)$ et $arctan\left(x\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$ sont les développements limités demandés .

(c) Pour tout x assez proche de 0 on a :

$$\begin{aligned}
ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-4x &= ln\left(1+x\right)-ln\left(1-x\right)-4x \\
&= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)-4x+o\left(x^5\right)\,(\mathbf{0.5pts}) \\
&= -2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+o\left(x^5\right)\ \ (\mathbf{0.5pts})\,.
\end{aligned}$$

2. (a) D'après les résultats de la question
$mathbf1$, pour tout x assez proche de 0 on a :

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= \frac{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+2arctan\left(x\right)-4x}{x^2arcsin\left(x\right)} \\
&= \frac{-2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+2\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)+o\left(x^5\right)}{x^2\left(x+\frac{x^3}{6}+\theta\left(x^3\right)\right)}\,(\mathbf{0.5pts}) \\
&= \frac{\frac{4x^5}{5}+o\left(x^5\right)}{x^3+\frac{x^5}{6}+o\left(x^5\right)} \\
&= \frac{\frac{4x^2}{5}+o\left(x^2\right)}{1+\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)} \\
&= \frac{4x^2}{5}-\frac{2x^4}{15}+o\left(x^4\right)\ \ (\mathbf{0.5pts})\,.
\end{aligned}$$

Donc $f\left(x\right)=\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{15}x^4+o\left(x^4\right)$ est le développement limité demandé .

(b) $f\left(x\right)=\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{15}x^4+o\left(x^4\right)$ étant le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4, alors $y=0$ est l'équation demandée ($\mathbf{0.5pts}$) . Par ailleurs comme $p=2$ et $\frac{4}{5}>0$, alors la courbe de f est au dessus de cette tangente au voisinage de 0 ($\mathbf{0.5pts}$) .

3. (a) Pour tout x assez proche de $-\infty$, en posant $t=\frac{1}{x}$, alors t est assez proche de 0 à gauche et on a :

$$\begin{aligned}
g\left(x\right) &= \frac{5}{4}x^3f\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{5}{4}x^3f\left(t\right)\,(\mathbf{0.5pts}) \\
&= \frac{5}{4}x^3\left(\frac{4}{5}t^2-\frac{2t^4}{15}+o\left(t^4\right)\right) \\
&= \frac{5}{4}x^3+\left(\frac{4}{5}\frac{1}{x^2}-\frac{2}{15x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\
&= x-\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\ \ (\mathbf{0.5pts})\,.
\end{aligned}$$

Donc le développement limité de la fonction g à l'ordre 1 au voisinage de $-\infty$ est donné par : $g\left(x\right)=x-\frac{1}{6}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) La courbe de g admet, au voisinage de $-\infty$, la droite (D) : $y=x$, c-à-d la la première bissectrice, comme asymptote ($\mathbf{0.5pts}$) .

Et comme pour tout x assez proche de $-\infty$, $g\left(x\right)-x=-\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $-\frac{1}{6x}>0$, alors la courbe de g est au dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$ ($\mathbf{0.5pts}$) .

Exercice 3 : (4 points)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e - e^{n \; ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= e - e^{n \; \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \; (\mathbf{0.5pts}) \\ &= e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e - e \; \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \; (\mathbf{0.5pts}) \, . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &= \left(\frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{1}{n} \; ln\left(\frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \; (\mathbf{0.5pts}) \\ &= e^{-\frac{ln(n)}{n} + \frac{1}{n} \; ln\left(\frac{e}{2} + o(1)\right)} \, . \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1 \; (\mathbf{0.5pts})$.

2. Cette suite est récurrente associée à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ qui est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc sur $I = [1, +\infty[$ et $f(I) =]1, 2] \, (\subset I)$, et comme $u_0 < u_2 \; (u_2 = 2)$, alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante . Par ailleurs, $f([1,2]) = \left[1 + \frac{1}{2}, 2\right] (\subset [1,2])$ et $u_0 \in [1,2]$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}) \, 1 \leqslant u_n \leqslant 2 \; (\mathbf{0.5pts})$, d'où (u_{2n}) est croissante et majorée et (u_{2n+1}) est décroissante et minorée, donc les deux suites convergent vers deux limites l et $l^{'}$ qui sont des point fixes de $g = f \circ f$ dans $I \; (\mathbf{0.5pts})$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) = x &\Longleftrightarrow f(f(x)) - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{f(x)} - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{2x+1}{x+1} - x = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{2x + 1 - x^2 - x}{x+1} = 0 \\ &\Longleftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; ou \; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; (\mathbf{0.5pts}) \, . \end{aligned}$$

et puisque $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin I$ car $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < 1$, alors $l = l^{'} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) de (u_n) convergent vers la même limite donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; (\mathbf{0.5pts})$.