UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ
FES

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **: LAGHZAL Mohamed**

Soutiendra **: le samedi 30/11/2019** à **14h** **Lieu : centre de conférences**

une thèse intitulée :

Etude de quelques problèmes elliptiques non homogènes avec singularité de type Hardy-Rellich.

En vue d'obtenir le Doctorat

FD : Mathématiques et Applications (MA)
Spécialité: Equations aux Dérivées Partielles

Devant le jury composé comme suit :

	NOM ET PRENOM	GRADE	ETABLISSEMENT
Président	Pr. ANANE Aomar	PES	ENSA- UMP-Oujda
Directeur de thèse	Pr. TOUZANI Abdelfattah	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
Rapporteurs	Pr. EL KHALIL Abdelouahed	PES	IMISUI - Ryad- KSA
	Pr. YOUSSFI Ahmed	PH	ENSA- Fès
	Pr. HAKIM Abdelilah	PES	FST-UCA- Marrakech
Membres	Pr. AKDIM Youssef	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
	Pr. ELLAIA Rachid	PES	EMI-UMV- Rabat
Invité	Pr. ALAOUI Morchid M.D.	PA	FST-UMI - Meknès

Résumé :

Le doctorant Mr. Mohamed Laghzal a développé dans ces travaux de recherches objet de cette thèse, des techniques sur les différents thématiques en EDP très poussées et originales, et sont présentées sous forme de plusieurs chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, le candidat introduit les préliminaires mathématiques nécessaires à la compréhension du manuscrit, le but de ce chapitre est que le lecteur puisse comprendre les travaux présentés d'une manière indépendante, évidemment le manuscrit est enrichi de plusieurs références.

Dans le deuxième chapitre, le candidat propose de montrer l'existence de solutions faibles du problème

$$(P1)\quad \begin{cases} -div\big(\omega(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) = \frac{f(u)}{(1-u)^2} & dans\ B_r\,, \\ 0 < u < 1 & dans\ B_r\,, \\ u \in W_0^{1,p}(\mathrm{B_r}, \omega) & \end{cases}$$

Ainsi, le candidat a étudié trois problèmes avec singularité de type Hardy :

$$(P2)\quad \begin{cases} \Delta\big(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\big) - \lambda\frac{|u|^{p-2}u}{\delta(x)^{2p}} = \mu|u|^{p-2}u & dans\ \Omega\,, \\ u \in W_0^{2,p}(\Omega) & \end{cases}$$

L'étude de ce problème fait l'objet du **chapitre 3**, s'articule autour de l'existence de la première courbe

$$\mu_1 : \lambda \to \mu_1(\lambda)$$

Où $\mu_1(\lambda)$ désigne la valeur propre principale du problème.

Dans le chapitre 4, le candidat a étendu ce dernier résultat dans l'espace à exposant variable aux problèmes :

$$(P3)\quad \begin{cases} \Delta\big(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\big) - \lambda\frac{|u|^{p(x)-2}u}{\delta(x)^{2p(x)}} = \mu|u|^{p(x)-2}u & dans\ \Omega\,, \\ u \in W_0^{2,p(x)}(\Omega) & \end{cases}$$

Et

$$(P4)\quad \begin{cases} \Delta\big(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\big) = \lambda\frac{|u|^{p(x)-2}u}{\delta(x)^{2p(x)}} & dans\ \Omega\,, \\ u \in W_0^{2,p(.)}(\Omega) & \end{cases}$$

Le chapitre 5 est consacré à l'étude du spectre du problème (P4) : Λ admet une suite croissante non bornée de valeurs propres positives. Ainsi que $\inf(\Lambda\,) > 0$, si et seulement si le domaine Ω satisfait l'inégalité de $q(.)$-Hardy-Rellich

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^{p(x)} dx \geq H \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)} u}{\delta(x)^{2p(x)}} dx$$

Le chapitre 6 regroupe des résultats relatifs aux propriétés spectrales de l'opérateur résultant de somme de $p(.)$-Laplacien et $p(.)$-biharmonique dans le problème

$$(\text{P5}) \begin{cases} \Delta\left(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\right) - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda\omega(x)|u|^{q(x)-2}u \quad dans\ \Omega\,, \\ u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega) \cap W^{2,p(.)}(\Omega). \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$ est un domaine borné régulier, $\lambda > 0$, ω est une fonction poids positive, et $p(.)$; $q(.)$: $\overline{\Omega} \rightarrow (1; +\infty)$ deux fonctions continues

Mots clés :

p-Laplacien, p(·)-Laplacien, p-biharmonique, p(·)-biharmonique, solutions faibles, les espaces de Sobolev avec poids, les espaces de Lebesgue-Sobolev exposants variables, condition de Palais-smale, Methodes variationnelles, l'ingalit de HardyRellich.

STUDY OF SOME NON-HOMOGENEOUS ELLIPTIC PROBLEMS WITH SINGULARITY OF HARDY- RELLICH TYPE

Abstract :

This thesis deals to study the existence of the solutions for some nonhomogeneous elliptic problems governed by certain operators, namely weighted p-Laplacian, or p-biharmonic, or p(·)-biharmonic, or both p(·)-Laplacian and p(·)-biharmonic operators in Sobolev spaces. More precisely we study the following problems. We establish in Chapter 2 the existence of weak solutions for the problem:

$$(P1)\quad \begin{cases} -div\left(\omega(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \frac{f(u)}{(1-u)^2} & dans\ B_r\ , \\ 0 < u < 1 & dans\ B_r\ , \\ u \in W_0^{1,p}(\mathrm{B_r}, \omega) & \end{cases}$$

In Chapter 3, we focus on the following problem involving a singularity of Hardy term:

$$(P2)\quad \begin{cases} \Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right) - \lambda\frac{|u|^{p-2}u}{\delta(x)^{2p}} = \mu|u|^{p-2}u & dans\ \Omega\,, \\ u \in W_0^{2,p}(\Omega) & \end{cases}$$

Using variational method, we are able to prove the existence of the first eigencurve of

the p-biharmonic operator:

$$\mu_1 : \lambda \to \mu_1(\lambda)$$

Where $\mu_1(\lambda)$ is the principal eigenvalue of the above quoted problem. The works of 0rlicz(1985) motivate us to extend the obtained results to the case of variable exponent p(x), which depend on location. So we study in chapter 4 problem

$$(P3)\quad \begin{cases} \Delta\left(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\right) - \lambda\frac{|u|^{p(x)-2}u}{\delta(x)^{2p(x)}} = \mu|u|^{p(x)-2}u & dans\ \Omega\,, \\ u \in W_0^{2,p(x)}(\Omega) & \end{cases}$$

In the Chapter 5, we study a more complicated problem involving a singularity term of Hardy with an extreme non homogeneity. the problem is:

$$(P4)\quad \begin{cases} \Delta\left(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\right) = \lambda \dfrac{|u|^{p(x)-2}u}{\delta(x)^{2p(x)}} & dans\ \Omega, \\ u \in W_0^{2,p(.)}(\Omega) \end{cases}$$

We show that the spectrum Λ admits a a non bounded positive increasing sequence of eigenvalues (λ_k)k≥1. Moreover, we establish the equivalence: inf Λ > 0, if and only if Ω satisfies the inequality q(·)-Hardy-Rellich, that is,

$$\int_\Omega |\Delta u|^{p(x)} dx \geq H \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}u}{\delta(x)^{2p(x)}} dx$$

Chapter 6 groups results on the spectral properties of a problem governed by both p(·)-harmonic and p(·)-biharmonic.

$$(P5)\quad \begin{cases} \Delta\left(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\right) - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda\omega(x)|u|^{q(x)-2}u \quad dans\ \Omega, \\ u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega) \cap W^{2,p(.)}(\Omega). \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ with $N \geq 1$ is a bounded smooth domain,$\lambda > 0$, ω is a nonnegative function, et $p(.);\ q(.): \overline{\Omega} \to (1; +\infty)$ are continuous functions

Key Words :

p-Laplacian, p(·)-Laplacian, p-Biharmonic, p(·)-Biharmonic, Weak solutions, Weighted Sobolev space, variable exponent Lebesgue-Sobolev spaces, PlaisSmale condition, variational methods, Hardy-Rellich inequality.