

**UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH  
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ  
FES**



**AVIS DE SOUTENANCE DE THESE**

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr : **BOUZIANI Mohammed**

Soutiendra : **le Samedi 23/11/2019 à 14h**      Lieu : **Centre Polyvalent des Etudes doctorales  
(Nouveau bâtiment)**

**une thèse intitulée :**

*On Some Nonlinear anisotropic Elliptic and Parabolic Problems.*

**En vue d'obtenir le Doctorat**

**FD :** Mathématiques et Applications (MA)

**Spécialité:** Equations aux dérivées partielles

**Devant le jury composé comme suit :**

	<b>NOM ET PRENOM</b>	<b>GRADE</b>	<b>ETABLISSEMENT</b>
<b>Président</b>	Pr. EL AMRI Hassan	PES	ENS - Casablanca
<b>Directeur de thèse</b>	Pr. AZROUL Elhoussine	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
<b>Rapporteurs</b>	Pr. GUEDDA Mohammed	PES	LAMFA-UPJV - Amiens
	Pr. REDWANE Hicham	PES	FSJES - Settat
	Pr. BENKIRANE Abdelmoujib	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
<b>Membres</b>	Pr. SEAID Mohammed	PES	Université de Durham - Angleterre
	Pr. BENNOUNA Jaouad	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
	Pr. MELLIANI Said	PES	FST- Beni Mellal
	Pr. ZERRIK El Hassan	PES	Faculté des Sciences - Meknès

**Résumé :**

Les travaux présentés dans cette thèse, portent sur l'étude de certains problèmes des équations aux dérivées partielles non linéaires anisotropiques, elliptiques et paraboliques de type Dirichlet. L'existence des solutions de ces types de problèmes est investiguée dans des espaces de Sobolev anisotropiques qui sont munis des exposants constants ou variables ou bien d'un poids. Ce travail qui se décompose en deux parties présente des résultats d'existence et de régularité de solutions faibles et entropiques pour six problèmes anisotropiques non linéaires du type mentionnées ci-dessous. La première partie concerne l'étude des problèmes non linéaires anisotropiques elliptiques et paraboliques avec des exposants variables. La seconde partie est consacrée à l'étude des problèmes non linéaires anisotropiques introduisant des singularités. Après une introduction générale, un bref exposé de définitions et résultats nécessaires pour la suite de notre travail, nous démontrons l'existence d'au moins une solution faible pour une classe d'équations non linéaires elliptiques et anisotropiques avec des termes de croissance naturelle dans l'espace de Sobolev anisotropique avec des exposants variables  $W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$ . Dans ce chapitre nous montrons deux résultats d'existence, le premier concerne un problème  $\vec{p}(x)$  –elliptique de type  $\Delta_{\vec{p}(x)}$  –laplacien avec des termes d'ordre inférieur sans hypothèse de signe, le second concerne un problème non linéaire elliptique anisotropique faisant intervenir un opérateur sous forme de divergence du type Leray-Lions et introduisant des termes d'ordre inférieur avec condition de signe. Dans le chapitre 3, nous établissons l'existence d'au moins une solution entropique d'un problème quasilinear anisotropique elliptique unilatéral de type Dirichlet avec des données peu régulières. Dans le chapitre 4, nous établissons l'existence d'une paire de solutions pour un problème fortement non linéaire anisotropique parabolique unilatéral avec un obstacle dépendant du temps, en se basant sur des techniques de pénalisation.

Dans la deuxième partie, nous étudions dans le chapitre 5, l'existence de solutions entropiques pour un problème quasilinear  $\vec{p}(x)$  –elliptique avec un potentiel de Hardy et des données dans  $L^1(\Omega)$ . Dans la même direction, au chapitre 6 nous démontrons l'existence d'une solution entropique pour un problème fortement non linéaire anisotropique de type  $\Delta_{\vec{p}(x)}$  –laplacien introduisant des termes d'ordre inférieur et un potentiel de Hardy. Et on achève cette partie par, le chapitre 7, où on établit un cadre fonctionnel adéquat des espaces de Sobolev anisotropiques avec poids, muni des injections continues et compactes, dans lesquels on étudie l'existence d'une solution entropique pour un problème elliptique quasilinear dégénéré avec comme terme singulier le potentiel de Hardy et une donnée  $f$  dans  $L^1(\Omega)$ .

**Mots clés :**

Equations nonlinéaires elliptiques, Equations paraboliques fortement nonlinéaires, Problèmes d'obstacle, termes d'ordre inférieur, Potentiel de Hardy, Solutions faibles, Solutions entropiques, Espaces duals, Espaces de Sobolev anisotropiques avec des exposants constants ou variables, Espaces de Sobolev anisotropiques avec poids.

**Abstract :**

The work presented in this thesis deals with the study of some problems of nonlinear anisotropic elliptic and parabolic partial differential equations with Dirichlet type. The existence of solutions of these types of problems is investigated in anisotropic Sobolev spaces which are provided with constant or variable exponents or with a weight. This work, which is divided into two parts, presents existence and regularity results of weak and entropic solutions for six nonlinear anisotropic problems of the type mentioned below. The first part concerns the study of nonlinear anisotropic elliptic and parabolic problems with variable exponents. The second part is dedicated to the study of nonlinear anisotropic problems introducing singularities. After a general introduction, a brief statement of definitions and necessary results for the rest of our work, we demonstrate the existence of at least one weak solution for a class of nonlinear elliptic and anisotropic equations with terms of natural growth in the anisotropic Sobolev space with variable exponents  $W_0^{1,\vec{p}(x)}(\Omega)$ . In this chapter we show two existence results, the first concerns  $\vec{p}(x)$  –elliptic problem of  $\Delta_{\vec{p}(x)}$  –laplacian type with lower-order terms without sign hypothesis, the second concerns a nonlinear anisotropic elliptic problem involving a Leray-Lions type divergence operator and introducing lower order terms with sign condition. In Chapter 3, we establish the existence of at least one entropic solution of a quasilinear anisotropic elliptic unilateral problem of Dirichlet type with less regular data. In Chapter 4, we establish the existence of a pair of solutions for a strongly nonlinear anisotropic parabolic unilateral problem with an obstacle depending in time, drawing on penalization techniques.

In the second part, we study in chapter 5, the existence of entropic solutions for a quasilinear  $\vec{p}(x)$  –elliptic problem with Hardy potential and  $L^1(\Omega)$  –data. In the same direction, in Chapter 6 we show the existence of an entropic solution for a strongly nonlinear anisotropic problem of  $\Delta_{\vec{p}(x)}$  –laplacian type introducing lower order terms and a potential of Hardy. And we end this part by, chapter 7, where we establish an appropriate functional framework of anisotropic weighted Sobolev spaces, provided with continuous and compact injections, in which we study the existence of an entropic solution for a quasilinear elliptic degenerated problem with as a singular term the potential of Hardy and a data  $f$  in  $L^1(\Omega)$ .

**Key Words :**

Nonlinear elliptic equations, Strongly nonlinear parabolic equations, Obstacles problems, Lower order terms, Hardy potential, Weak solutions, Entropic solutions, Dual spaces, Anisotropic Sobolev spaces with constant or variable exponents, Weighted anisotropic Sobolev spaces