

**UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH  
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ  
FES**



**AVIS DE SOUTENANCE DE THESE**

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr : **AHARROUCH Benali**

Soutiendra : **le Samedi 23/11/2019 à 09h**      Lieu : **Centre Polyvalent des Etudes doctorales  
(Nouveau bâtiment)**

**une thèse intitulée :**

*Bounded solutions of some class of degenerated elliptic problems in  $p(x)$  and weighted Sobolev spaces.*

**En vue d'obtenir le Doctorat**

**FD :** Mathématiques et Applications (MA)  
**Spécialité:** Equations aux dérivées partielles

**Devant le jury composé comme suit :**

	<b>NOM ET PRENOM</b>	<b>GRADE</b>	<b>ETABLISSEMENT</b>
<b>Président</b>	Pr. BENKIRANE Abdelmoujib	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
<b>Directeur de thèse</b>	Pr. BENNOU NA Jaouad	PES	Faculté des Sciences Dhar ElMahraz - Fès
<b>Rapporteurs</b>	Pr. AZROUL Elhoussine	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
	Pr. TSOULI Najib	PES	Faculté des Sciences- Oujda
	Pr. RHOUDAF Mohamed	PES	Faculté des Sciences - Meknès
<b>Membres</b>	Pr. GUEDDA Mohammed	PES	LAMFA-UPJV - Amiens
	Pr. EL AMRI Hassan	PES	Ecole Normale Supérieure - Casablanca
	Pr. REDWANE Hicham	PES	FSJES- Settat
	Pr. CHERIF Moussa	PH	CRMEF - Meknès

## Résumé :

Dans cette thèse, nous étudions quelques problèmes d'équations elliptiques non linéaires introduisant un opérateur de Leray-Lions à coercivité dégénérée, un terme d'ordre inférieur de croissance naturelle, et le second membre à différentes sommabilité. Ce travail, composé de sept chapitres, présente des résultats d'existence et unicité de solutions faibles, renormalisées ou entropiques pour des problèmes non linéaires du type mentionnés ci-dessous.

Nous établissons au chapitre 2 une estimation  $L^\infty$  et l'existence de solutions pour l'équation elliptique dégénérée suivante :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x,u,Du) &= f - \operatorname{div} g \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où  $f$  et  $g$  appartiennent à  $(L^{r(\cdot)}(\Omega))^N$  et  $L^{q(\cdot)}(\Omega)$  respectivement.

Dans le Chapitre 3, on étudie le problème suivant :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x,u,Du) + H(x,u,Du) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Nous prouvons d'abord une estimation  $L^\infty$  et ensuite l'existence de solutions faibles et entropiques avec le second membre appartenant à  $L^{r(\cdot)}(\Omega)$ .

Au chapitre 4, nous étudions un problème unilatéral avec un terme d'ordre inférieur et une mesure absolument continue.

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(x,u,Du) + \vartheta(u)) + g(x,u) &= f - \operatorname{div} F \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Nous prouvons une estimation  $L^\infty$ , l'existence et l'unicité de la solution avec le terme d'ordre inférieur vérifie la condition de Lipschitz pour montrer l'unicité.

Au chapitre 6, nous étudions l'existence des solutions d'un problème elliptique dégénéré suivant dans le cadre des espaces de Sobolev avec poids

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(x,u, Du)) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Nous avons prouvé des estimations a priori des solutions avec les différentes hypothèses sur le second membre, et nous obtenons des résultats d'existence.

Dans le dernier chapitre, nous prouvons une estimation a priori, et l'existence de solutions du problème elliptique dégénéré suivant, avec les différentes hypothèses sur le second membre et dans le cadre des espaces de Sobolev avec poids.

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x,u,Du) + H(x,u,Du) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

## Mots clés :

Problèmes elliptiques, espace de Sobolev, solutions renormalisées, solutions d'entropie, Problème unilatéral, problèmes non coercitifs, espaces de Lorentz,  $L^\infty$ -estimation de Stampacchia, méthode de réarrangement.

# BOUNDED SOLUTIONS OF SOME CLASS OF DEGENERATED ELLIPTIC PROBLEMS IN $P(X)$ AND WEIGHTED SOBOLEV SPACE

## Abstract:

In this thesis, we study some problems of nonlinear elliptic equations involving an operator of Leray-Lions has degenerate coercivity, with the second member make a different assumptions and a lower order term with natural growth.

This work, composed of seven chapters present results of existence and uniqueness of weak, renormalized or entropy solutions for the nonlinear problems of the type mentioned below.

We establish in Chapter 2 an  $L^\infty$  estimate and existence of solutions for the following degenerate elliptic equation

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x,u,Du) &= f - \operatorname{div} g \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Where the  $f$  and  $g$  make a different assumptions.

In Chapter 3, we study a problem of type:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x,u,Du) + H(x,u,Du) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

We prove an  $L^\infty$  estimate and existence of weak and entropy solutions with data make a different assumptions.

In Chapter 4 we study a unilateral problem with a lower order terms and data measure absolutely continuous.

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(x,u,Du) + \phi(u)) + g(x,u) &= f - \operatorname{div} F \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

We prove an  $L^\infty$  estimate, existence and uniqueness of solution with the lower order terms verifies the Lipschitz condition.

In chapter 6 we study the existence of solutions of the following degenerated elliptic problem in the framework of weighted Sobolev space:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(x,u, Du)) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

We have proved an a priori estimate of solutions with the different assumptions on the second member and we obtain the existence results.

In the last chapter, we prove an a priori estimate with the different assumptions on the second member, and an existence of solutions of the following degenerated elliptic problem in the framework of weighted Sobolev space:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x,u,Du) + H(x,u,Du) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

## Key Words:

Elliptic problems, Sobolev space, Renormalized Solutions, Entropy solutions, Unilateral problem, noncoercive problems, Lorentz spaces,  $L^\infty$ -estimate of Stampacchia, Rearrangement method.